Υποδείξεις Τεστ 5, Απειροστικος Λογισμός 2

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Για κάθε $n \geq 2$, έχουμε

$$I_n = \int x' \ln^n x \; dx = x \ln^n x - \int x \; n(\ln^{n-1} x)\frac{1}{x} \; dx = x \ln^n x - nI_{n-1}.$$

Έτσι,

$$J = x \ln^3 x - 3I_2 = x \ln^3 x - 3(x \ln^2 x - 2I_1) = x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6I_1,$$

όπου $I_1 = \displaystyle\int \ln x \; dx = \int x' \ln x \; dx = x \ln x - \int x\frac{1}{x} \; dx = x(\ln x - 1) + c, \; c \in \mathbb{R}$

Θέμα 2

(i) Ο ισχυρισμός είναι αληθής, γιατί αν $\displaystyle\int_2^3 f(x) \; dx = 0$, επειδή $f \geq 0$ θα έπρεπε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [2, 3]$ και αυτό είναι άτοπο, γιατί η f έχει εικόνα το διάστημα $[0, 2021]$.

(ii) Από τη δοθήσα ισότητα μεταφέροντας όλους τους προσθετέους στο πρώτο μέλος και με χρήση της γραμμικότητας του ολοκληρώματος συνάγουμε

$$\int_0^1 (f(x) - 4)^2 \; dx = 0.$$

Εφόσον τώρα η $g(x) = (f(x) - 4)^2, \; x \in [0, 1]$ είναι συνεχής και μη αρνητική αναγκαστικά η g κάνει ταυτοτικά μηδέν στο $[0, 1]$. Συνεπώς, $f(x) = 4, \; x \in [0, 1]$.

(iii) Θέτοντας $f(x) = \sin(\pi x)$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}, \; x \in [0, 1]$ με χρήση (δύο φορές συμμετρικά) του γενικού θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού πηγάζει το ζητούμενο. Στη συνέχεια για να δείξουμε τη ζητούμενη διπλή ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\pi} \leq \frac{2}{\pi(a^2 + 1)} \leq \frac{2}{\pi},$$

το οποίο έπεται άμεσα με ισοδυναμίες.

Θέμα 3

(i) Θέτοντας $u = -x$ προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

(ii) Από το ζήτημα (i) και το γεγονός ότι η f είναι άρτια, προκύπτει

$$\int_{-a}^{a} f(x) \; dx = \int_{-a}^{0} f(x) \; dx + \int_0^a f(x) \; dx = \int_0^a f(x) \; dx + \int_0^a f(x) \; dx = 2\int_0^a f(x) \; dx.$$

(iii) Απο το ζήτημα (i) και το γεγονός ότι η f είναι περιττή, προκύπτει

$$\int_{-a}^{a} f(-x) \; dx = \int_{-a}^{0} f(-x) \; dx + \int_0^a f(-x) \; dx = \int_0^a f(x) \; dx + \int_0^a f(-x) = 0.$$

Επίσης, $F(-x) = F(x)$ (αυτό προκύπτει εύκολα κάνοντας αλλαγή μεταβλητής)

(iv) Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι περιττή και άρα το ολοκλήρωμα της στο συμμετρικό διάστημα $[-100, 100]$ κάνει μηδέν.

Θέμα 4
Για το πρώτο: Είναι

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\, dx$$

Θέτουμε $u = \sin x$ και το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{du}{1-u^2} &= -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{(u+1)-(u-1)}{(u-1)(u+1)}\, du = -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{du}{u-1} + \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{du}{u+1} \\ &= -\frac{1}{2}\left[\ln|u-1|\,\right]_0^{1/2} + \frac{1}{2}\left[\ln|u+1|\,\right]_0^{1/2} = \frac{\ln 3}{2}.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο: Παρατηρούμε ότι $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ και εκτελούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Για το τρίτο: Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\sqrt{12-4x-x^2} = \sqrt{16-(x+2)^2}$ και συνεπώς θέτουμε $x+2 = 4\sin t$. Στη συνέχεια, θα χρειαστούμε την ταυτότητα $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

Για το τέταρτο: Ονομάζουμε το αρχικό ολοκήρωμα I και εκτελούμε 2 φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int x' \sin(\ln x)\, dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx = x\sin(\ln x) - \int x' \cos(\ln x) \\ &= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - I.\end{aligned}$$

Οπότε, επιλύοντας την εξίσωση ως προς I παίρνουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα.